

軽凝縮数学と関数解析のホモロジー代数化：随伴関手から超関数まで（真・完全詳解版）

本稿は、Dustin ClausenとPeter Scholzeによって提唱された「凝縮数学 (condensed mathematics)」およびその扱いやすい変種である「軽凝縮数学 (light condensed mathematics)」について、これまでの議論をすべて統合した完全版の解説です。圏論の基礎である随伴関手の性質、Freydの一般随伴関手定理の「必要性」「十分性」両方の完全な証明から始まり、軽プロ有限集合の特徴付け、位相空間の圏との関係、内部Homの構成、そして関数解析におけるLF空間や超関数空間の代数的な定式化に至るまで、一切の省略や要約を行わず、数学的詳細と豊富な具体例の解説を記述します。

1. 随伴関手と極限・余極限の保存

凝縮数学の層の構成や内部Homの性質を理解する上で、すべての基盤となるのが随伴関手 (adjoint functors) と極限の保存の関係です。「左随伴は余極限を保ち、右随伴は極限を保つ」という圏論の基本定理を厳密に証明します。

定理 (RAPL / LAPC)

圏 \mathcal{C} および \mathcal{D} の間に随伴関手の組 $L: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}: R$ (すなわち L が R の左随伴、 $L \dashv R$) が存在するとする。このとき、 L は \mathcal{C} に存在する任意の小余極限を保ち、 R は \mathcal{D} に存在する任意の小極限を保つ。

証明

圏論的な双対性 (\mathcal{C}^{op} と \mathcal{D}^{op} を考えること) により、 L が余極限を保つことを示せば十分である。

小圏 J から \mathcal{C} への関手 (図式) $F: J \rightarrow \mathcal{C}$ をとり、 \mathcal{C} において余極限 $C = \lim_{\rightarrow j \in J} F(j)$ が存在すると仮定する。我々が示すべきことは、 \mathcal{D} において図式 $L \circ F$ の余極限が存在し、それが自然な同型 $L(C) \cong \lim_{\rightarrow j \in J} L(F(j))$ を満たすことである。

これを証明するために、対象 $L(C)$ が \mathcal{D} における余極限の普遍性を満たすことを確認する。任意の \mathcal{D} の対象 Y をとる。随伴 $L \dashv R$ の定義により、対象の組 (C, Y) に関して自然な全単射が存在する：

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, R(Y))$$

ここで、 $C = \lim_{\rightarrow j \in J} F(j)$ であり、共変Hom関手 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ は反変関手としては余極限を極限に変換する普遍性 (余極限の定義そのもの) を持つため、次が成り立つ：

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim_{\rightarrow j \in J} F(j), R(Y)) \cong \lim_{\leftarrow j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(j), R(Y))$$

この右辺の極限は、集合の圏 Set における極限である。再び随伴 $L \dashv R$ の全単射を、各 $j \in J$ について適用する：

$$\lim_{\longleftarrow j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(j), R(Y)) \cong \lim_{\longleftarrow j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(F(j)), Y)$$

以上の自然な同型をすべて結合すると、任意の \mathcal{D} の対象 Y について、次の全単射を得る：

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), Y) \cong \lim_{\longleftarrow j \in J} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(F(j)), Y)$$

右辺は「各 $j \in J$ に対して射 $L(F(j)) \rightarrow Y$ が与えられ、それらが図式 $L \circ F$ の射と両立するような余錐 (cocone) の集合」に他ならない。これが左辺の $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), Y)$ と自然に全単射であるということは、 $L(C)$ から Y への射が、図式 $L \circ F$ から Y への余錐と一対一に対応することを意味する。これはまさに $L(C)$ が図式 $L \circ F$ の余極限であることの定義である。

したがって、 $L(\lim_{\longrightarrow j \in J} F(j)) \cong \lim_{\longrightarrow j \in J} L(F(j))$ が成立し、 L は小余極限を保つ。(証明終)

極限・余極限を保つ随伴関手の組の詳細な重要例 10選

随伴関手の性質 (RAPL/LAPC) が数学の各分野でどのように具現化されているか、具体的に解説します。

- 自由群と忘却関手 (代数学)** : 集合から生成される自由群を作る関手 $F: \text{Set} \rightarrow \text{Grp}$ は左随伴です。直和 (集合の非交和) を群の自由積 (群の余極限) に写します。一方、群の構造を忘れる右随伴の忘却関手 $U: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ は、群の直積 (極限) を単なる集合の直積に正しく保ちます。
- テンソル積とHom関手 (環論・線形代数)** : 加群の圏において、テンソル積関手 $- \otimes_R N$ は左随伴であるため、右完全関手として余極限 (直和やコケーネル) を保ちます。その右随伴である $\text{Hom}_R(N, -)$ は左完全関手となり、極限 (直積やカーネル) を保ちます。ホモロジー代数の原点とも言える随伴です。
- 層化と包含関手 (層の理論)** : 前層から層を生成する層化関手 (sheafification) $a: \text{PSh} \rightarrow \text{Sh}$ は左随伴です。これにより、層の圏における余極限は「前層として余極限をとった後に層化する」ことで計算されます。右随伴である包含関手 $i: \text{Sh} \rightarrow \text{PSh}$ は極限を保つため、層の極限は前層としての極限 (各点ごとの極限) と一致します。
- 逆像と順像 (代数幾何学・トポス理論)** : 連続写像や射 f に対して、層の逆像 f^* は左随伴であり、余極限やファイバー積を保ちます。層の順像 f_* は右随伴であり、極限を保ちます。この双対性がグロタンディークのトポス理論における幾何学的射の定義そのものになっています。
- 懸垂とループ空間 (代数的トポロジー)** : 点付き位相空間のホモトピー圏において、空間を「吊り下げる」懸垂関手 Σ は左随伴であり、空間の「ループ」をとるループ空間関手 Ω は右随伴です。これにより Σ は余ファイバー列を保ち、 Ω はファイバー列を保つというホモトピー論の基本構造が生まれます。
- アーベル化と包含関手 (群論)** : 一般の群からその交換子群で割ってアーベル群を作るアーベル化 $(-)^{\text{ab}}: \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ は左随伴であり、群の自由積をアーベル群の直和に変換します。右随伴の包含関手 $U: \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$ は直積を保ちます。
- 離散位相と忘却関手 (位相空間論)** : 集合に離散位相 (すべての部分集合が開集合) を入れる関手 $D: \text{Set} \rightarrow \text{Top}$ は左随伴であり、集合の直和 (非交和) を位相空間の直和に保ちます。位相を忘れる右随伴 $U: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ は位相空間の直積の台集合が、台集合の直積になることを保証します。
- 忘却関手と密着位相 (位相空間論)** : 今度は忘却関手 $U: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$ を左随伴とみなすと、その右随伴は集合に密着位相 (開集合が空集合と全体のみ) を入れる関手 $I: \text{Set} \rightarrow \text{Top}$ となります。 U は左随伴でも右随伴でもある (両側随伴を持つ) ため、位相空間の極限も余極限も台集合のレベルで計算できることがわかります。
- Stone-Čechのコンパクト化 (位相空間論)** : 任意の完全正則空間からコンパクトHausdorff空間を普遍的に構成する左随伴 β は、完全正則空間の余極限をコンパクト空間の余極限に結びつけます。右随伴はコンパクトHausdorff空間からの包含関手です。

10. **定数層と大域切断 (層の理論)** : 空間上の層の圏において、集合から定数層を作る関手 Δ は左随伴です。層の大域切断をとる関手 Γ はその右随伴となります。右随伴は極限を保つため、 Γ は常に左完全関手 (カーネルを保つ) となり、ここから層のコホモロジー理論 (右導来関手) が展開されます。

2. Freydの一般随伴関手定理 (GAFT) とその完全な証明

関手が随伴を持つための必要十分条件を与えるのがFreydの一般随伴関手定理 (General Adjoint Functor Theorem) です。前節の「随伴ならば極限を保つ」という性質の逆にあたる強力な定理であり、層の構成や局所化など、圏論的構成の存在を保証する上で極めて重要です。ここでは必要性、十分性ともにいかなる省略も行わず完全に証明します。

定義 (解集合条件 / Solution Set Condition)

関手 $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が**解集合条件 (SSC)** を満たすとは、 \mathcal{C} の任意の対象 X に対して、ある「小さな集合 (small set)」で添字付けられた \mathcal{D} の対象と射の組の族 $S = \{(D_i, f_i : X \rightarrow R(D_i))\}_{i \in I}$ が存在し、任意の $D \in \mathcal{D}$ および任意の射 $h : X \rightarrow R(D)$ に対して、ある $i \in I$ と射 $g : D_i \rightarrow D$ が存在して、

$$R(g) \circ f_i = h$$

を満たすことをいう。

定理 (Freydの一般随伴関手定理)

\mathcal{D} を局所小 (locally small) かつ小極限を持つ完全 (complete) な圏とする。このとき、関手 $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が左随伴 $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を持つための必要十分条件は以下の2つを同時に満たすことである：

- R がすべての小極限を保つ。
- R が解集合条件 (SSC) を満たす。

完全な証明 (必要性と十分性の両方)

【必要性】の完全な証明：

R が左随伴 $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を持つと仮定する。このとき、条件(1)と(2)が成り立つことを示す。

まず条件(1)について。定理1 (LAPC) の通り、随伴関手の組において右随伴はつねにすべての極限を保つため、 R は小極限を保ち、条件(1)は自動的に満たされる。

次に、条件(2)の解集合条件 (SSC) について確認する。任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ を固定する。随伴 $L \dashv R$ に付随する単位元 (unit) の自然変換を $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow R \circ L$ とし、その対象 X におけるコンポーネントを $\eta_X : X \rightarrow R(L(X))$ とおく。ここで、 \mathcal{D} の単一の対象 $L(X)$ と一本の射 η_X からなる単元集合 $S = \{(L(X), \eta_X)\}$ を考える。この小さな集合 (要素数1) が解集合の条件を満たすことを示す。

任意の $D \in \mathcal{D}$ と、任意の射 $h: X \rightarrow R(D)$ が与えられたとする。随伴関手の定義により、対象の組 (X, D) に関して自然な全単射 $\Phi: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(X), D) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(D))$ が存在する。全単射であるため、 \mathcal{C} の射 h に対応する \mathcal{D} の射がただ1つ存在する。これを $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(L(X), D)$ とおく（すなわち $\Phi(g) = h$ ）。

随伴の単位元 η_X の性質（あるいは Φ の具体的な構成法）から、 $\Phi(g)$ はつねに合成射 $R(g) \circ \eta_X$ として書けることが知られている。したがって、

$$R(g) \circ \eta_X = h$$

を満たす \mathcal{D} の射 $g: L(X) \rightarrow D$ が確かに存在することが証明された。これは解集合の定義そのものであり、単一の要素からなる小さな集合 S がその条件を完全に満たすため、 R は解集合条件 (SSC) を満たす。

【十分性】の完全な証明：

R が極限を保ち、かつSSCを満たすと仮定する。任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して、コンマ圏 $(X \downarrow R)$ を考える。この圏の対象は組 $(D, h: X \rightarrow R(D))$ であり、射 $g: (D, h) \rightarrow (D', h')$ は \mathcal{D} の射 $g: D \rightarrow D'$ であって $R(g) \circ h = h'$ を満たすものである。我々の目的は、このコンマ圏 $(X \downarrow R)$ に**始対象 (initial object)** が存在することを示すことである（その始対象の \mathcal{D} 成分を $L(X)$ と定義すれば普遍性により左随伴が構成される）。

ステップ1 (弱始対象の構成)：SSCにより、 $(X \downarrow R)$ には小さな解集合 $S = \{(D_i, f_i)\}_{i \in I}$ が存在する。 \mathcal{D} は完全であるため、小さな積 $P = \prod_{i \in I} D_i$ が存在する。各成分への射影を $\pi_i: P \rightarrow D_i$ とする。関手 R は極限を保つため、 $R(P) \cong \prod_{i \in I} R(D_i)$ であり、 $R(P)$ は射影 $R(\pi_i)$ による積である。各 $f_i: X \rightarrow R(D_i)$ から積の普遍性により、一意な射 $u: X \rightarrow R(P)$ が存在し、すべての i について $R(\pi_i) \circ u = f_i$ を満たす。このとき、対象 (P, u) は $(X \downarrow R)$ における**弱始対象 (weakly initial object)** である。なぜなら、任意の対象 (D, h) に対して、SSCによりある f_i を経由する $g: D_i \rightarrow D$ が存在し、合成 $g \circ \pi_i: P \rightarrow D$ は (P, u) から (D, h) へのコンマ圏の射を正しく与えるからである。

ステップ2 (始対象の候補の構成)：弱始対象は射の存在を保証するが、一意性を保証しない。厳密な始対象を得るために、 (P, u) の自己準同型 (endomorphisms) の集合を考える。 \mathcal{D} が局所小であるため、コンマ圏 $(X \downarrow R)$ も局所小であり、自己準同型の集合 $M = \text{End}_{(X \downarrow R)}(P, u)$ は小さな集合である。 \mathcal{D} は完全であるから、集合 M に属するすべての射の多重イコライザ (multiple equalizer) $e: E \rightarrow P$ が存在する。 R は極限を保つため、 $R(e): R(E) \rightarrow R(P)$ は \mathcal{C} におけるすべての $R(m)$ ($m \in M$) の多重イコライザとなる。

ここで、すべての $m \in M$ について、 m は $(X \downarrow R)$ の射であるためコンマ圏の定義から $R(m) \circ u = u$ が成り立つ。これは $u: X \rightarrow R(P)$ がすべての $R(m)$ を等化すること（すなわち $R(m) \circ u = \text{id}_{R(P)} \circ u$ ）を意味する。イコライザの普遍性により、一意な射 $v: X \rightarrow R(E)$ が存在して、 $R(e) \circ v = u$ となる。これにより、射 $e: (E, v) \rightarrow (P, u)$ がコンマ圏の射として定まる。この (E, v) が求める始対象の候補である。

ステップ3 (一意性の完全な証明)： (E, v) が厳密な始対象であることを示す。任意の対象 (Y, y) への射が存在することは、 (P, u) が弱始対象であり、さらに (E, v) から (P, u) への射 e が存在することから、合成によってただちに従う。残る問題は射の一意性である。2つの射 $a, b: (E, v) \rightarrow (Y, y)$ が存在したとする。 \mathcal{D} における a と b のイコライザを $eq: K \rightarrow E$ とする。前段と同様の論理 (R がイコライザを保つこと) により、 (K, w) もまたコンマ圏の対象となり、 $eq: (K, w) \rightarrow (E, v)$ はコンマ圏の射となる。

(P, u) は弱始対象であるため、ある射 $k: (P, u) \rightarrow (K, w)$ が存在する。ここで合成射 $e \circ eq \circ k: P \rightarrow P$ を考える。これは (P, u) から (P, u) への自己射であるため、集合 M の要素である。イコライザ e の定義より、 e は M のすべての要素を等化し、かつ恒等射 id_P とも等化するため、

$$e \circ (e \circ eq \circ k) = e \circ \text{id}_P = e$$

が成り立つ。イコライザ e は単射 (monomorphism) であるため、左から e をキャンセル (簡約) することができる。したがって、

$$e \circ eq \circ k = \text{id}_E$$

となる。これを用いて射 a と b が等しいことを計算する。まず a を展開する：

$$a = a \circ \text{id}_E = a \circ (e \circ eq \circ k) = (a \circ e \circ eq) \circ k$$

ここで eq は元々 a と b のイコライザとして定義されたため、 $a \circ eq = b \circ eq$ である（コンマ圏の射としても同じ）。したがって、式の中の $a \circ eq$ を $b \circ eq$ に置き換えると、

$$= (b \circ e \circ eq) \circ k = b \circ (e \circ eq \circ k) = b \circ \text{id}_E = b$$

よって $a = b$ となり、 (E, v) から任意の対象への射は完全に一意であることが示された。すなわち (E, v) は $(X \downarrow R)$ の始対象であり、 $X \mapsto E$ という対応が求める左随伴関手 L を与える。（証明終）

3. 軽プロ有限集合 (Light Profinite Sets) の基礎

「凝縮数学」は位相空間を層として扱う強力な理論ですが、古典的なプロ有限集合をテスト空間にすると、巨大な基数に関する集合論的困難（基数問題）を伴いました。これを「可算生成（第二可算）」な対象に制限することで完全に回避し、かつ解析学の展開に十分な広さを持たせたのが「軽凝縮数学」です。そのベースとなるテスト空間が軽プロ有限集合です。

定義と定理 (軽プロ有限集合の同値な特徴付け)

位相空間 S に対して、以下の条件はすべて互いに同値である。これらの条件のいずれかを満たすとき、 S を**軽プロ有限集合 (light profinite set)** と呼ぶ。

- (A) S はコンパクト、Hausdorff、完全不連結であり、かつ距離化可能 (metrizable) である。（※コンパクト距離空間であるため第二可算公理も満たす）
- (B) S は可算個の有限離散空間の逆極限 $\lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} S_n$ として位相空間の圏において表される。
- (C) S はCantor集合 $2^{\mathbb{N}}$ （ 2 は二点離散空間 $\{0, 1\}$ ）の閉部分空間に同相である。

軽プロ有限集合を対象とし、連続写像を射とする圏を $\text{Prof}_{\text{light}}$ と表す。

証明の論理展開

(B) \implies (A) の証明：有限離散空間 S_n はコンパクト、Hausdorff、完全不連結かつ距離化可能である。可算個の積 $\prod_{n \in \mathbb{N}} S_n$ は、Tychonoffの定理よりコンパクトであり、Hausdorff性と完全不連結性も引き継ぐ。また、可算個の距離空間の積は（例えば $d(x, y) = \sum 2^{-n} d_n(x_n, y_n) / (1 + d_n)$ によって）距離化可能である。逆極限 $\lim_{\leftarrow} S_n$ はこの可算積の閉部分空間であるため、コンパクト距離空間の閉部分空間として、(A) の性質をすべて満たす。

(C) \implies (B) の証明：Cantor集合 $2^{\mathbb{N}}$ は、 $S_n = 2^n$ としたときの逆極限 $\lim_{\leftarrow} S_n$ に同相である（射影は最初の n 座標をとる写像）。Cantor集合の閉部分空間 S をとると、各射影による S の像 $X_n \subset S_n$ も有限離散空間となる。コンパクト空間の逆極限の性質により、 $S \cong \lim_{\leftarrow} X_n$ が成り立ち、可算個の有限離散空間の逆極限として表せる。

(A) \implies (C) の証明: S がコンパクト、Hausdorff、完全不連結な距離空間であるとする。距離化可能コンパクト空間は第二可算公理を満たす (基底として可算個の開集合をとれる)。完全不連結性より、開かつ閉 (clopen) な集合の族が基底をなす。第二可算公理より、その中から可算個の clopen 集合の族 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって、点を分離するものを抽出できる。写像 $f: S \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ を $f(x) = (c_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (ただし $x \in U_n$ なら $c_n(x) = 1$ 、そうでないなら 0) と定義する。各成分が連続なので f は連続であり、点を分離するので単射である。コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な単射は中への同相写像 (位相的埋め込み) となる。したがって S は Cantor 集合の閉部分空間と同相になる。(証明終)

4. 距離化可能コンパクト Hausdorff 空間の圏 (LCH) の性質

距離化可能コンパクト Hausdorff 空間の圏を仮に LCH と書いたとします。LCH は $\text{Prof}_{\text{light}}$ を含み、解析学で扱う多くの空間の構成要素となります。しかし、LCH をそのまま用いてホモロジー代数を展開することはできません。その決定的な理由が「十分な射影的对象が存在しない」ことです。

定理 (LCH 圏は十分に射影的对象を持たない)

圏 LCH は「十分に射影的对象を持つ (has enough projectives)」という性質を満たさない。

完全な証明

背理法で示す。圏 LCH が十分に射影的对象を持つと仮定する。このとき、任意の対象 $X \in \text{LCH}$ に対して、射影的对象 $P \in \text{LCH}$ と全射な連続写像 $p: P \rightarrow X$ が存在する。

コンパクト Hausdorff 空間の圏 CH における Gleason の定理 (Gleason's theorem) を用いる。Gleason の定理は「コンパクト Hausdorff 空間が CH において射影的であるための必要十分条件は、その空間が超不連結 (extremally disconnected) であることである」と述べている。空間が超不連結であるとは、任意の開集合の閉包が再び開集合となる (すなわち clopen になる) ことをいう。 P は LCH において射影的であるが、圏の包含関係から、これは CH においても射影的であることを意味するため、 P は超不連結でなければならない。

一方で、 $P \in \text{LCH}$ であるため、 P は距離化可能空間でもある。ここで、「超不連結な距離化可能空間は離散空間である」という位相空間論の事実を証明する。

補題の証明: 距離化可能な空間 P に孤立点でない点 x が存在したと仮定する。距離化可能であるため第一可算公理を満たし、 x に収束する点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ただしすべての n で $x_n \neq x$) が存在する。この点列から、互いに交わらない近傍を持つような部分列を選ぶことができる (Hausdorff 性による)。添字の偶奇で分けて、開集合 $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_{2k}, r_{2k})$ を構成する (各球は他の点列の点を含まないように半径を十分小さく取る)。この開集合 U の閉包 \bar{U} を考える。点列 $\{x_{2k}\}$ は x に収束するため、 $x \in \bar{U}$ である。しかし、 x の任意の近傍は奇数番目の点 x_{2k+1} を無数に含んでしまうため、 x は \bar{U} の内点にはなり得ない。すなわち \bar{U} は開集合ではなくなり、超不連結性に矛盾する。よって、 P は孤立点のみからなる離散空間である。

補題より、 P は離散空間である。さらに $P \in \text{LCH}$ はコンパクトであるため、コンパクトな離散空間は有限空間でなければならない。すなわち、 P は有限離散空間である。

最初の仮定により、任意の $X \in \text{LCH}$ に対して有限離散空間 P からの連続な全射 $p: P \rightarrow X$ が存在することになる。写像が全

射であるため、 X の要素の数は P の要素の数以下であり、 X も有限集合でなければならない。これは「LCH に属するすべての空間 X が有限集合である」という結論を導く。

しかし、LCH には区間 $[0, 1]$ や Cantor 集合など、明らかに無限の濃度を持つ空間が含まれており、明確な矛盾が生じる。

よって、仮定は誤りであり、圏 LCH は十分に射影的対象を持たない。（証明終）

5. 軽凝縮集合 (Light Condensed Sets) と位相空間の埋め込み

定義 (軽凝縮集合)

軽凝縮集合 (light condensed set) とは、小圏 $\text{Prof}_{\text{light}}$ 上の集合値の層 (sheaf) のことである。すなわち、反変関手 $X : \text{Prof}_{\text{light}}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ であって、 $\text{Prof}_{\text{light}}$ における任意の有限被覆族（すなわち全射な連続写像の有限族）に対して層の降下条件 (descent condition) を満たすものをいう。軽凝縮集合を対象とし、層の射（自然変換）を射とする圏 (Grothendieck トポス) を LCond と表す。

軽凝縮集合が内包する重要空間の例 10選 (詳細解説)

軽凝縮集合は単なる抽象的な層ではなく、解析学や幾何学に現れるあらゆる空間を統一的に表現できます。

- Cantor 集合 $2^{\mathbb{N}}$** : 軽プロ有限集合の最も基本的な普遍的対象であり、米田埋め込みを通して代表可能層として扱われます。すべての軽プロ有限集合はCantor集合の閉部分空間として実現されます。
- 任意のコンパクト距離空間** : 軽プロ有限集合ではありませんが、Cantor集合からの連続な全射が存在するため、層の圏 LCond においては軽プロ有限集合の同値関係による商（余極限）として完全な代数的表現を与えられます。
- 実数の台集合 \mathbb{R}** : 実数直線 \mathbb{R} は局所コンパクト空間であり、軽凝縮集合として自然に埋め込まれます。単なる集合としてではなく、軽プロ有限空間からの連続写像の集まりとして認識されるため、連続性の情報を完全に保持しつつ、代数的な極限操作による位相の崩壊（例えば密着位相になってしまうこと）を未然に防ぎます。
- 可分な多様体 (separable manifolds)** : 第二可算公理を満たす局所コンパクトHausdorff空間であるため、コンパクト部分集合の可算和として表され、軽凝縮集合の自然な対象となります。
- CW複体** : 胞体（セル）の貼り合わせという位相空間論の余極限操作が、層の圏の余極限として計算可能になり、ホモロジーやコホモロジーが正しく機能します。
- 無限ループ空間 $\Omega^{\infty} E$** : 代数的トポロジーに現れるスペクトラムの無限ループ空間も、位相的な極限操作が自然に扱える LCond 内で展開できます。
- 無限次元Banach空間の閉単位球 (弱*位相)** : 関数解析において、可分なBanach空間の双対空間の閉単位球は、弱*位相のもとでコンパクト距離化可能空間となります。したがって、これは軽プロ有限空間として直接扱うことができ、関数解析のホモロジー化のテスト空間として機能します。
- 代数多様体の \mathbb{C} -値点 $X(\mathbb{C})$** : 複素数体上の代数多様体の解析空間としてのトポロジーは、凝縮圏に埋め込むことで、スキーム論的な代数幾何と解析的なトポロジーがシームレスに結合されます。
- 離散集合 (discrete sets)** : どんな単なる集合も、定数層として LCond に埋め込むことができます。トポロジーを持たない純粋な代数的対象も同じ土俵で扱えます。
- 分類空間 BG** : 位相群 G の分類空間は、単体的対象の幾何学的実現として構成されますが、この実現操作が凝縮圏の余極限

として完全に整備されます。

内部操作で生まれる面白い対象

- **病的な商空間 \mathbb{R}/\mathbb{Q}** : 古典的な位相空間の圏で実数 \mathbb{R} を有理数 \mathbb{Q} で割ると、全く分離できない密着位相の空間になってしまいます。しかし、凝縮圏において層の商（余極限）として構成すると、「軽プロ有限空間からの局所的な連続写像」の情報を保持した、非常に豊かで意味のある層となります。
- **解析的な普遍被覆空間**: 葉層構造の商空間や、エルゴード的な力学系の軌道空間など、非Hausdorffな潰れた空間になりがちな対象も、横断的なダイナミクスを層のデータとして精緻に記述できます。

6. 位相空間の埋め込みと最大限の圏

命題 (位相空間の凝縮圏への埋め込み)

任意の位相空間 $T \in \text{Top}$ に対し、前層 $\underline{T} : \text{Prof}_{\text{light}}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ を $\underline{T}(S) := \text{Hom}_{\text{Top}}(S, T)$ (すなわち連続写像の集合) と定義します。すると、連続写像の局所的な貼り合わせが可能であることから、 \underline{T} は自動的に層 (軽凝縮集合) になります。これにより、自然な関手 $i : \text{Top} \rightarrow \text{LCond}$ が定まります。

この関手 i はすべての位相空間に対して忠実ですが、一部の「病的な位相空間」では充満になりません。 i が充満忠実 (fully faithful) になるような、 Top に埋め込めるだけ大きな位相空間の部分圏は、**軽コンパクト生成空間 (lightly compactly generated spaces)** と呼ばれる空間の圏です。これは、「空間 T の任意の部分集合 A が閉集合であるための必要十分条件が、任意の軽プロ有限空間 S と連続写像 $f : S \rightarrow T$ に対して、引き戻し $f^{-1}(A)$ が S において閉集合になること」を満たすような、扱いやすい弱Hausdorff空間たちのなす圏と一致します。私たちが日常的に扱う空間はすべてこの範疇に入ります。

7. 代表可能層による余極限表現の完全な証明

任意の層 (軽凝縮集合) A は、代表可能層 (テスト空間である軽プロ有限集合) の余極限 (直和や貼り合わせなどの極限操作) として完全に表現できます。この事実は「要素の圏 (Category of Elements)」を用いることで、直観的な説明に逃げることなく一般論として厳密に証明できます。

注 (内部射影的生成元) : LCond はGrothendieckトポスであり、代表可能層の族 $\{y(S) \mid S \in \text{Prof}_{\text{light}}\}$ が生成集合となります。各 $y(S)$ は自由対象であり、関数解析のホモロジー代数を支える優れた**内部射影的生成元 (internal projective generator)** として機能します。

定理 (一般の前層・層は代表可能層の余極限である)

小圏 \mathcal{C} 上の前層の圏 $\widehat{\mathcal{C}} = \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set})$ と米田埋め込み $y: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ を考える。任意の $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ に対して、要素の圏 $\int F$ を添字圏としたとき、 $F \cong \lim_{\rightarrow (C,x) \in \int F} y(C)$ が成り立つ。

(※層化関手は左随伴であり余極限を保つため、この事実は層の圏 LCond でもそのまま成立する。)

証明

ステップ1：要素の圏と余錐 (Cocone) の構成

要素の圏 $\int F$ とは、対象をペア (C, x) (ただし $C \in \text{Ob}(\mathcal{C}), x \in F(C)$) とし、射 $f: (C', x') \rightarrow (C, x)$ を \mathcal{C} の射 $f: C' \rightarrow C$ であって $F(f)(x) = x'$ を満たすものとする圏である。

忘却関手 $P: \int F \rightarrow \mathcal{C}$ を $P(C, x) = C$ とする。図式 $y \circ P: \int F \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ に対する余極限が F であることを示す。そのためには、まず F を頂点とする余錐を構成する。各対象 $(C, x) \in \int F$ に対し、自然変換 $\tau_{(C,x)}: y(C) \rightarrow F$ を定義する。米田の補題より $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(y(C), F) \cong F(C)$ であるため、元 $x \in F(C)$ に対応する自然変換を一意に選べる。具体的には、任意の対象 $D \in \mathcal{C}$ におけるコンポーネント $\tau_{(C,x),D}: \text{Hom}(D, C) \rightarrow F(D)$ を、射 $g: D \rightarrow C$ に対して $\tau_{(C,x),D}(g) := F(g)(x)$ と定義する。

これが $\int F$ の射に対して可換になることを確認する。射 $f: (C', x') \rightarrow (C, x)$ (すなわち $f: C' \rightarrow C$ かつ $F(f)(x) = x'$) が与えられたとき、 $\tau_{(C,x)} \circ y(f) = \tau_{(C',x')}$ となるかを見る。任意の $D \in \mathcal{C}$ と $g \in \text{Hom}(D, C')$ に対して、

$$(\tau_{(C,x)} \circ y(f))_D(g) = \tau_{(C,x),D}(f \circ g) = F(f \circ g)(x)$$

反変関手 F の性質より $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ なので、

$$F(g)(F(f)(x)) = F(g)(x') = \tau_{(C',x'),D}(g)$$

となり、三角形の図式は可換である。よって τ は余錐をなす。

ステップ2：普遍性の証明

この余錐が普遍性を持つことを示す。別の頂点 $G \in \widehat{\mathcal{C}}$ と余錐 $\alpha_{(C,x)}: y(C) \rightarrow G$ が与えられたとする。一意的な自然変換 $\Phi: F \rightarrow G$ であって、任意の (C, x) について $\Phi \circ \tau_{(C,x)} = \alpha_{(C,x)}$ を満たすものを構成する。

任意の $C \in \mathcal{C}$ と $x \in F(C)$ に対して、 $\Phi_C(x)$ を決定しなければならない。定義より $\tau_{(C,x),C}(\text{id}_C) = F(\text{id}_C)(x) = x$ であるから、もし条件を満たす Φ が存在するなら、

$$\Phi_C(x) = \Phi_C(\tau_{(C,x),C}(\text{id}_C)) = (\Phi \circ \tau_{(C,x)})_C(\text{id}_C) = (\alpha_{(C,x)})_C(\text{id}_C)$$

でなければならない。これが Φ の一意性を証明している。次に、この式で $\Phi_C(x) := (\alpha_{(C,x)})_C(\text{id}_C)$ と定義した Φ が実際に自然変換となり、かつ分解条件を満たすことを確認する。

自然性の確認：任意の $h: C' \rightarrow C$ について、 $(G(h) \circ \Phi_C)(x) = \Phi_{C'}(F(h)(x))$ を示す。左辺は $G(h)((\alpha_{(C,x)})_C(\text{id}_C))$ であり、 $\alpha_{(C,x)}$ の自然性より $(\alpha_{(C,x)})_{C'}(h \circ \text{id}_C) = (\alpha_{(C,x)})_{C'}(h)$ に等しい。一方、要素の圏には射 $h: (C', F(h)(x)) \rightarrow (C, x)$ が存在するため、 α が余錐である条件 $\alpha_{(C,x)} \circ y(h) = \alpha_{(C',F(h)(x))}$ を用いると、右辺は $(\alpha_{(C',F(h)(x))})_{C'}(\text{id}_{C'}) = (\alpha_{(C,x)} \circ y(h))_{C'}(\text{id}_{C'}) = (\alpha_{(C,x)})_{C'}(h \circ \text{id}_{C'}) = (\alpha_{(C,x)})_{C'}(h)$ となり、両辺は完全に一致する。よって Φ は自然変換である。

分解条件の確認： $\Phi_D(\tau_{(C,x),D}(g)) = \Phi_D(F(g)(x)) = (\alpha_{(D,F(g)(x))})_D(\text{id}_D)$ 。再び α の余錐条件を射 $g: (D, F(g)(x)) \rightarrow (C, x)$ に適用すると、 $(\alpha_{(C,x)} \circ y(g))_D(\text{id}_D) = (\alpha_{(C,x)})_D(g)$ となり一致する。

以上により、 F が普遍的な余極限であることが完全に証明された。(証明終)

8. 内部Homとデカルト閉性

定義と構成 (軽凝縮集合の圏における内部Hom)

\mathbf{LCond} はGrothendieckトポスであるため、デカルト閉 (Cartesian closed) です。すなわち、単なる集合としてのHomではなく、連続写像の空間を正しい位相空間的な情報を持った層として内包する内部Hom $\underline{\text{Hom}}(X, Y) \in \mathbf{LCond}$ が任意の対象 X, Y に対して一意に存在します。

具体的には、任意のテスト空間 $S \in \mathbf{Prof}_{\text{light}}$ に対する値として次のように定義されます：

$$\underline{\text{Hom}}(X, Y)(S) := \text{Hom}_{\mathbf{LCond}}(X \times y(S), Y)$$

証明 (内部Homの随伴性と極限交換)

定義した $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$ が層になることは、Grothendieckトポスにおける層の極限から従う。示すべきは、任意の $A \in \mathbf{LCond}$ に対して自然な全単射

$$\text{Hom}_{\mathbf{LCond}}(A \times X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathbf{LCond}}(A, \underline{\text{Hom}}(X, Y))$$

が存在することである。

まず A が代表可能層 $y(S)$ の場合、米田の補題より右辺は $\underline{\text{Hom}}(X, Y)(S)$ に同型である。定義よりこれは $\text{Hom}_{\mathbf{LCond}}(X \times y(S), Y)$ であり、直積の可換性を用いれば左辺と一致する。

一般の層 A については、前節の定理より $A \cong \lim_{\rightarrow j} y(C_j)$ と書ける。トポスにおける直積関手 $- \times X$ は左随伴として余極限と交換するため (普遍的余極限性)、

$$\text{Hom}(A \times X, Y) \cong \text{Hom}\left(\lim_{\rightarrow j} y(C_j) \times X, Y\right) \cong \text{Hom}\left(\lim_{\rightarrow j} (y(C_j) \times X), Y\right)$$

共変Homの第一変数の余極限は外に出ると逆極限になるため (極限の保存性)、

$$\cong \lim_{\leftarrow j} \text{Hom}(y(C_j) \times X, Y)$$

代表可能層で証明した随伴性を適用し、

$$\cong \lim_{\leftarrow j} \text{Hom}(y(C_j), \underline{\text{Hom}}(X, Y))$$

逆極限を再び第一変数の余極限に戻すと、

$$\cong \text{Hom}\left(\lim_{\rightarrow j} y(C_j), \underline{\text{Hom}}(X, Y)\right) \cong \text{Hom}(A, \underline{\text{Hom}}(X, Y))$$

となり、一般の層に対しても随伴性が成立することが示された。(証明終)

9. 軽凝縮Abel群とホモロジー代数

位相群の圏は同型定理が成り立たない（全単射な連続準同型が同相写像になるとは限らない）ため、一般にアーベル圏になりません。しかし、位相を忘れて「軽凝縮Abel群の圏」へと移行すると、グロタンディークのアーベル圏の公理を満たす完全なアーベル圏となり、ホモロジー代数が自由に行えるようになります。

軽凝縮Abel群の重要例 10選（詳細解説）

- 実数加法群 \mathbb{R}** ：位相アーベル群としての実数を軽凝縮Abel群として扱くと、射影分解や単射分解を持つ純粋なホモロジー代数の対象となります。極限操作を行っても密着位相のような病的な状態に陥りません。
- 円周群 $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$** ：完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1 \rightarrow 0$ が層の圏において正確に成立し、長完全列を構成してコホモロジーの計算に活躍します。
- p 進整数環 \mathbb{Z}_p** ：有限環 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の逆極限として自然に定義され、プロ有限群の典型例として凝縮数学における重要な基礎をなします。
- ソリッド・アーベル群 $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$** ：単なる代数的な無限直積ではなく、解析的な完備化の構造を代数的に捉えた「ソリッド (solid)」と呼ばれる特別な性質を持ちます。代数と解析の架け橋となる対象です。
- 局所コンパクト (locally compact) アーベル群**：Pontryagin双対性などの調和解析の基本定理が、凝縮アーベル圏における純粋な内部Homの双対性 $\underline{\text{Hom}}(-, S^1)$ として再定式化されます。
- 実Banach空間**：「実リキッド・ベクトル空間 (real liquid vector spaces)」として扱われ、連続線形作用素の有界性や Ext 群の消滅定理などを、位相的な不等式評価ではなく純粋なホモロジー代数として処理できます。
- Fréchet空間**：Banach空間の可算極限として構成され、微分方程式の解空間のコホモロジー理論や、解析関数の層の計算が飛躍的に簡単化されます。
- Radon測度の空間 $\mathcal{M}(S)$** ：実数を係数とするフリーなリキッド空間として、空間 S 上の積分や測度論を普遍的な代数構造として実現する役割を持ちます。
- 連続関数の空間 $C(X, \mathbb{Z})$** ：空間 X から \mathbb{Z} への連続関数のなす空間は、内部Hom $\underline{\text{Hom}}(X, \mathbb{Z})$ として定義され、空間 X のトポロジー（連結成分など）を代数的に引き抜くための重要な不変量を与えます。
- 複素数体 \mathbb{C}** ：実数同様に基礎係数群として扱われ、これをベースにすることで複素解析幾何学やGAGAの定理などを純代数的手法で展開することが可能になります。

10. 無限次元空間の帰納極限とLF空間

無限次元の関数解析では、空間を「小さい空間の無限の和」として構成しますが、古典的な位相空間論ではこの極限操作が解析的に破綻することがありました。これを凝縮数学がどのように解決するかを見ます。

定義 (Cauchy列と完備性、LF空間)

位相線形空間 X における点列 (x_n) が**Cauchy列**であるとは、原点の任意の近傍 V に対して、ある N が存在して、 $n, m > N$ な

らば $x_n - x_m \in V$ となることをいう。空間内の任意のCauchy列が収束するとき、空間は**完備 (complete)** であるという。

Fréchet空間の増大列 $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ に対して、その和集合 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ に帰納極限位相を入れたものを**LF空間 (Limit of Fréchet spaces)**と呼ぶ。

古典的な帰納極限の病理と凝縮圏での完全な解決

古典的な位相空間の圏では、帰納極限（無限の和や貼り合わせ）は直積と交換せず、完備な空間の帰納極限であっても完備性が失われることがあり、また完全関手にもなりません。これが関数解析を難しくしている主因の一つです。

しかし、凝縮圏における帰納極限は層の余極限として計算されます。コンパクトなテスト空間 S に対して、 $(\varinjlim V_n)(S) = \varinjlim (V_n(S))$ と評価されます。なぜなら、コンパクト空間 S からの連続写像の像はコンパクトであり、増大列の有限段階に必ず収まるからです。さらに、軽凝縮Abel群の圏は**グロタンディークのAB5公理**を満たし、フィルター付けられた帰納極限は完全 (exact) になり、ホモロジー代数の強力なツールがすべてそのまま使えます。

11. テスト関数空間 $\mathcal{D}_{\text{cond}}$ と超関数空間 $\mathcal{D}'_{\text{cond}}$ における位相的ジレンマの終焉

以上の代数的な準備を経て、関数解析の最大の鬼門であった超関数空間の「位相の選択のジレンマ」が、凝縮数学によってどのように完全に解消されるかを詳細に解説します。

超関数空間 $\mathcal{D}'_{\text{cond}}$ における位相問題の完全な解決

古典的な関数解析において、超関数を定義するための「テスト関数の空間 \mathcal{D} 」は、コンパクトな台を持つ滑らかな関数の空間 F_n （各 F_n は距離化可能な完備空間であるFréchet空間）の増大列の帰納極限 $\varinjlim F_n$ （いわゆるLF空間）として構成されます。ここまでは問題ありません。

しかし、その双対空間である「超関数空間 \mathcal{D}' 」を考える際に深刻な問題が発生します。古典論では双対空間に位相を入れる必要がありますが、「各点収束位相（弱*位相）」を入れるべきか、「一様収束位相（強位相）」を入れるべきかという不毛なジレンマが生じます。LF空間 \mathcal{D} 自体は反射的 (reflexive) ですが、 \mathcal{D}' にどの位相を選択してもホモロジー代数（例えばテンソル積との完全性の相性や、導来関手の計算）との相性が悪く、ボルノロジー空間 (Bornological spaces) など別の圏論的枠組みを導入しなければならないという煩雑さがありました。

凝縮数学においては、この位相の選択という問題自体が消滅します。双対空間は、何らかの位相を選択するものではなく、LCond という巨大なトポスの中の単なる**内部Hom**として一意に再定義されるからです：

$$\mathcal{D}'_{\text{cond}} := \underline{\text{Hom}}(\mathcal{D}_{\text{cond}}, \mathbb{R}_{\text{cond}}) = \underline{\text{Hom}}(\varinjlim F_n, \mathbb{R}_{\text{cond}})$$

ここで、第8節で証明した「内部Homの第一変数は余極限を逆極限に変える」という普遍的な随伴の性質を用います：

$$\mathcal{D}'_{\text{cond}} \cong \varprojlim \underline{\text{Hom}}(F_n, \mathbb{R}_{\text{cond}})$$

各 F_n は単なるFréchet空間であり、Fréchet空間の双対は古典的にも全く曖昧さがなく、その振る舞いは完全に理解されていま

す。この式が意味するのは、凝縮超関数空間 $\mathcal{D}'_{\text{cond}}$ は、巨大で複雑なLF空間上の汎関数を一気に考えようとするのではなく、「行儀の良い空間 F_n 上の局所的な超関数の層を、圏論的に最も自然な逆極限 \varprojlim で束ねただけの層」になるということです。

さらに、テスト空間である軽プロ有限集合 S を代入して評価すると、

$$\mathcal{D}'_{\text{cond}}(S) \cong \varprojlim \underline{\text{Hom}}(F_n, \mathbb{R}_{\text{cond}})(S) = \varprojlim \text{Hom}_{\text{LCond}}(F_n \times y(S), \mathbb{R}_{\text{cond}})$$

となり、すべての解析的な連続性の情報が、テスト空間 S との直積からの射という純粋な代数的条件の中に完全にエンコードされます。これにより、「どの位相を入れるべきか」という人為的な選択を排除し、完全なアーベル圏の中で超関数のテンソル積やコホモロジーの計算といった代数演算を、一切の破綻なく実行することが可能となるのです。

12. 引用文献・参考文献の完全な解説

本稿の理論的基盤をなす重要な文献群です。凝縮数学の原論文から、その背景となる圏論、トポロジー、関数解析の古典的名著まで、一切の省略なく各文献の意義と本稿での役割を詳述します。

[1] Dustin Clausen and Peter Scholze. "Lectures on Condensed Mathematics", 2019.

本稿における役割と内容の解説： 凝縮数学の端緒となった画期的な講義録です。古典的な位相空間の圏がホモロジー代数と決定的に相性が悪いという問題を提起し、その解決策としてプロ有限空間（本稿ではその軽量版である軽プロ有限空間）をテスト空間とする層の圏（凝縮圏）を導入しました。本稿の第5節から第9節における凝縮集合の定義、アーベル圏への移行、そして位相群の病的な振る舞いがどのようにして層の完全列として美しく解消されるかという基礎理論は、すべてこの文献の第1講から第3講の内容に基づいています。

URL: <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/CondensedMathematics.pdf>

[2] Dustin Clausen and Peter Scholze. "Lectures on Analytic Geometry", 2019–2020.

本稿における役割と内容の解説： 凝縮数学を関数解析および非アルキメデス幾何学へ応用した講義録です。本稿の第10節および第11節の核となる「リキッド・ベクトル空間 (Liquid Vector Spaces)」の概念がここで展開されています。Banach空間やFréchet空間の完備性を、解析的な不等式ではなく純代数的なコホモロジー群の消滅定理として再定義する手法が詳細に記述されており、超関数空間の位相的ジレンマ（強位相か弱位相か）が無意味になるプロセスを学ぶための最も重要な一次資料です。

URL: <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf>

[3] Dustin Clausen and Peter Scholze. "Condensed Mathematics and Complex Geometry", 2022.

本稿における役割と内容の解説： 上記の理論をさらに複素幾何学へと拡張した発展的な文献です。本稿では具体的な複素多様体の記述までは踏み込みませんでしたが、第9節の例10で触れた「複素数体 \mathbb{C} の凝縮的な扱いとGAGAの定理の代数化」の理論的裏付けとなっています。解析空間の接続層の理論を、凝縮圏内部の純代数的なホモロジー代数として再構築する壮大な試みがなされて

います。

URL: <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Complex.pdf>

[4] Saunders Mac Lane. "Categories for the Working Mathematician", Springer, 1971.

本稿における役割と内容の解説： 圏論の絶対的なバイブルであり、本稿の第1節および第2節の完全な基盤です。「左随伴は余極限を保ち、右随伴は極限を保つ (RAPL / LAPC)」という定理の証明、およびFreydの一般随伴関手定理 (GAFT) の必要性和十分性のエレガントな証明手法は、本書の第V章（随伴）の内容をベースに、さらに行間を完全に埋める形で記述されています。極限や普遍性といった概念を扱う上で不可欠な文献です。

[5] Alexander Grothendieck. "Sur quelques points d'algèbre homologique" (Tôhoku Math. J.), 1957.

本稿における役割と内容の解説： いわゆる「東北論文」と呼ばれる、アーベル圏とホモロジー代数の歴史的労作です。本稿の第9節および第10節において、軽凝縮Abel群の圏が「AB5公理（フィルター付けられた帰納極限が完全である性質）」を満たすという決定的な事実や、内部射影的生成元の存在（第7節）によって圏が極めて良い性質を持つことの保証は、すべてGrothendieckがこの論文で定式化したGrothendieck圏の公理系に依存しています。

[6] Peter T. Johnstone. "Stone Spaces", Cambridge University Press, 1982.

本稿における役割と内容の解説： 位相空間論、特に完全不連結空間とプロ有限空間に関する包括的な専門書です。本稿の第3節および第4節で詳述した「軽プロ有限空間の同値な特徴付け（Cantor集合の閉部分空間としての実現）」や、コンパクトHausdorff空間の圏 (LCH) が射影的対象を十分に持たないこと（Gleasonの定理による超不連結空間の議論）の位相空間論的・位相幾何学的な厳密な証明は、本書の理論を直接的に参照し、再構成したものです。

[7] François Trèves. "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels", Academic Press, 1967.

本稿における役割と内容の解説： 古典的な関数解析、特に局所凸空間と超関数の理論における世界的な標準的教科書です。本稿の第10節および第11節で指摘した、古典的LF空間（Fréchet空間の帰納極限）における位相の病的振る舞いや、超関数空間 \mathcal{D}' に位相を導入する際の煩雑な技術的困難（弱*位相と強位相のジレンマ、ボルノロジーの必要性）という「凝縮数学が打破すべき旧来の壁」の全容を正確に把握するための対照文献として極めて重要です。